

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

(экзаменационные вопросы первого семестра, первый поток)

ЧАСТЬ 1. ВЕКТОРЫ, МАТРИЦЫ, ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Арифметические и геометрические векторы. Линейные комбинации. Линейные оболочки. Линейная зависимость и независимость. Базис и размерность линейной оболочки.
2. Операции над матрицами и их свойства.
3. Подстановки и перестановки, транспозиции, четность.
4. Определитель как функция столбцов (строк) квадратной матрицы. Определитель транспонированной матрицы. Определитель произведения матриц.
5. Миноры и их алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Формулы Крамера.
6. невырожденные матрицы. Обратные матрицы. Критерий обратимости матрицы. Алгебраические дополнения и элементы обратной матрицы.
7. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Ранг произведения матриц. Ранг матрицы и элементарные преобразования.
8. Приведение матрицы к ступенчатому виду. Приведение к диагональному виду. Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.
9. Системы линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования уравнений. Критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий единственности решения.
10. Метод Гаусса исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Число арифметических операций в методе Гаусса.
11. Геометрические свойства множества решений однородной системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение неоднородной системы.
12. Векторные и параметрические уравнения прямой и плоскости в аффинной системе координат. Общее уравнение прямой в аффинной системе координат на плоскости. Критерий параллельности вектора прямой. Общее уравнение плоскости в аффинной системе координат в пространстве. Критерий параллельности вектора плоскости. Взаимное расположение прямых в пространстве. Взаимное расположение двух прямых на плоскости и плоскостей в пространстве. Полуплоскости и полупространства.
13. Скалярное произведение геометрических векторов. Вычисление скалярного произведения в прямоугольных декартовых координатах.
14. Векторное и смешанное произведения векторов. Их вычисление в прямоугольных декартовых координатах. Геометрический смысл определителя.
15. Нормали к прямой и плоскости. Расстояние от точки до прямой и до плоскости.
16. Преобразования прямоугольных декартовых систем координат и ортогональные матрицы.
17. Матричная запись общего уравнения кривой второго порядка на плоскости, замена переменных и конгруэнтные матрицы. Метод вращений. Приведенные уравнения. Середины параллельных хорд и центр симметрии.
18. Эллипс, гипербола, парабола. Фокусы и директрисы.
19. Матричная запись общего уравнения поверхности второго порядка. Метод вращений для конгруэнтного приведения к диагональному виду вещественной симметричной матрицы.
20. Приведенные уравнения поверхности второго порядка. Эллипсоид, гиперboloиды, параболоиды, конусы, цилиндрические поверхности.

ЧАСТЬ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

1. Декартово произведение множеств и бинарные отношения. Отношение эквивалентности и классы эквивалентности.
2. Определение группы. Аддитивные группы и кратные элемента. Мультипликативные группы и степени элемента. Порядок элемента. Группа невырожденных матриц. Группа ортогональных матриц.
3. Подгруппы, смежные классы, нормальные подгруппы (нормальные делители), фактор-группы.
4. Конечные группы. Теорема Лагранжа. Действие группы на множестве.
5. Симметрическая и знакопеременная группы. Теорема Кэли о конечных группах.
6. Циклические группы. Подгруппы циклической группы. Конечно порожденные абелевы группы.
7. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп. Ядро гомоморфизма. Теорема о гомоморфизме.
8. Комплексные числа, модуль и аргумент. Тригонометрическая форма комплексного числа.
9. Корни из единицы. Группа корней n -й степени из единицы. Первообразные корни. Функция Эйлера.
10. Определения кольца и поля. Делители нуля. Целостное кольцо и поле частных. Кольцо вычетов.
11. Кольцо многочленов над полем. Деление с остатком и алгоритм Евклида. Теорема о наибольшем общем делителе.
12. Разложение многочлена на неприводимые множители. Факториальные кольца.
13. Значения многочлена и корни. Теорема Безу. Расширение поля путем присоединения корня неприводимого многочлена.
14. Многочлены от n переменных. Симметрические многочлены. Формулы Виета и элементарные симметрические многочлены.
15. Линейные пространства и подпространства над полем. Базисы и размерность.
16. Поле вычетов по неприводимому многочлену. Поле разложения многочлена.
17. Производная многочлена и кратные корни.
18. Характеристика поля. Поле вычетов по простому модулю. Циклическость мультипликативной группы конечного поля. Общий вид конечного поля.
19. Основная теорема алгебры. Разложение многочленов на линейные множители.
20. Канонические разложения комплексных и вещественных многочленов.